– අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය 2023 -

සංයුක්ත ගණිතය

≈ සමතුලිතතාවය - 3 ≈

Manoj Solangaarachchi
(B. Sc.)

---

(01) තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත බර ඒකාකාරර ඝන අර්ධ ගෝලයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය ආනත තලය මත ගැටෙමින් සමතුලිතතාවේ තිබේ. අර්ධ ගෝලයේ තල මූණත තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වෙයි නම්,

$\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{8\sin\alpha}{\sqrt{9-64\,sin^2\,\alpha}}\right\}$ බව පෙන්වන්න.

---

(02) බර W වූ ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A වලදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කොට ඇති දණ්ඩේ B කෙළවරට සම්බන්ධ කොට ඇති තන්තුවක් A ට සිරස් ලෙස ඉහළින් ඇති C කප්පියක් මතින් පන්නා එහි නිදහස් කෙළවරේ w භාරයක් ගැටගසා තිබේ. සිරසට ආනතව සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, $AC = \frac{W}{2w}CB$ බව පෙන්වන්න.

---

(03) ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ දී $a : b$ අනුපාතයට බෙදෙන දණ්ඩක් තිරසට θ කෝණයකින් ආනතව සුමට ගෝලයක් තුළ සමතුලිතතාවේ පවතී. ගෝලයේ කේන්ද්‍රයේ දී දණ්ඩේ ආපාතන කෝණය 2α නම්, $\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

---

(04) ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සෑදී ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක පතුලේ අර්ධ විෂ්කම්භය r ය. උස h ය. දිග l වූ සැහැල්ලු තන්තුවක් එකම තිරස් මට්ටමේ එකිනෙකට d දුරකින් $(h > d)$ ඇත් වූ සුමට කුඤ්ඤ දෙකක් මතින් පන්නා තන්තුවේ එක් කෙළවරක් කේතුවේ ශීර්ෂයට ද, අනෙක් කෙළවර කේතුවේ පාදයේ පරිධියෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයකට ද ගැටගසා තිබේ. කේතුවේ අක්ෂය තිරස්ව පිහිටන සේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, $l = d + \frac{(h-d)\sqrt{h^2+4r^2}}{h}$ බව පෙන්වන්න.

---

(05) අර්ධ විෂ්කම්භය r වූ සුමට ගෝලයකින් කපාගන්නා ලද අර්ධ ගෝලයක් ගැට්ට තිරස්ව පිහිටන සේ දෘඪ ලෙස සවිකොට තිබේ. ඒකාකාර සිහින් බරැති දණ්ඩක් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ දණ්ඩේ කෙළවරක් අර්ධ ගෝලය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක ගැටෙමින් ද අනෙක් කෙළවර ගැට්ටෙන් පිටතට නෙරා පිහිටමින් ද තිබෙන සේය. දණ්ඩේ දිග l ද

දණ්ඩ තිරසට ආනත කෝණය θ ද නම්, $l\cos\theta = 4r\cos 2\theta$ බව ද,

$4r > l > \frac{\sqrt{6}\,r}{3}$ බව ද පෙන්වන්න.

---

(06) දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතව තබා ගනියි නම් එම බල තුන එකම ලක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතු බවත් එසේ නැතහොත් සමාන්තර විය යුතු බවත් පෙන්වන්න.

බර W ද, අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබේ. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතින්නේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුළෙහි පිහිටන පරිදිය. තිරසට අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\frac{\pi}{6}$ වෙයි. තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\theta < \left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\theta < \left(\frac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රයේ ගැටියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම් ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $\theta = \frac{1}{2}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right\}$ බවත්

(ii) $l = \frac{1}{2} r \sec\theta$ බවත්

(iii) $R = \frac{W}{\left(8 + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^{\frac{1}{2}}}$ බවත් සාධනය කරන්න.

---

(07) බර W ද අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් a දිගැති තන්තුවක් මගින් අචල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබේ. බර W ද දිග $4a$ ද වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් එම ලක්ෂ්‍යයට ම නිදහසේ ඇඳා ඇත. දණ්ඩ ගෝලය හා ස්පර්ශ වෙමින් නිසලව තිබෙයි නම් තන්තුවේත්, දණ්ඩේත් සිරසට ආනති එක එකක් $\frac{\pi}{12}$ ට සමාන වන බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{W\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ බව ද පෙන්වා ගෝලයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

---

(08) සුමට නාදත්තක් සුමට සිරස් බිත්තියකට a දුරකින් වූ P ලක්ෂ්‍යයක සවිකර ඇත. දිග $6a$ සහ බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර බිත්තිය සමග ස්පර්ශව නාදත්ත මත නිශ්චලතාවේ සමතුලිතව තිබේ. AB දණ්ඩ තිරස සමග සාදන කෝණය θ ලෙස ගෙන දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන බල නිරූපණය කරමින් බල ත්‍රිකෝණයක් අදින්න.

P හි දී ප්‍රතික්‍රියාව W සහ θ ඇසුරෙන් සොයන්න. $3\cos^3\theta = 1$ බව පෙන්වන්න.

(09) එක එකෙහි අරය a සහ බර W වූ ඒකාකාර සුමට ගෝල දෙකක් එකිනෙක ස්පර්ශ කරමින් අරය $b\,(> 2a)$ වූ අචල සුමට අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක ඇතුළත නිශ්චලව තිබේ. එක් ගෝලයක් මත ක්‍රියාකරන බල නිරූපණය කරමින් වෙන ම රූප සටහනක බල ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ ගෝල දෙක අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{Wa}{\sqrt{b\,(b-2a)}}$ බව පෙන්වන්න.

---

(10) අර්ධ විෂ්කම්භය R වන සිලින්ඩරයක් තුළ එකිනෙකෙහි අර්ධ විෂ්කම්භය r ද, බර W ද වූ A, B හා C සුමට සිලින්ඩර තුනක් A, B සිලින්ඩර මත C සිලින්ඩරය පිහිටන සේ සමමිතික ලෙස තබා ඇත. අක්ෂ තිරස්ව පිහිටන සේ සිලින්ඩර සියල්ල තබා ඇත්නම් පද්ධතිය සමතුලිතව පැවතීම සඳහා $r \geq \dfrac{R}{2\sqrt{7}+1}$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

---

(11) එක එකෙහි දිග $2l$ හා බර w වන AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් A, B, C හා D හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් රොම්බසයක් සාදා ඇත. මෙම රොම්බසයේ ඉහළින් පිහිටි AB, AD දඬු දෙක එකිනෙකට $2a$ දුරක් ඇත්ව එකම තිරස් මට්ටමේ වූ සුමට නාදැති දෙකක් මත තිබෙන පරිදි රොම්බසය සමමිතික ලෙස සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ ඇත. පහලම C ලක්ෂ්‍යයෙහි W' භාරයක් එල්ලා ඇත. $B\hat{A}D = 2\theta$ නම්

(i) නාදැති මත ප්‍රතික්‍රියා $\dfrac{4w + w'}{2\sin\theta}$ බව

(ii) $\sin^3\theta = \dfrac{a}{4l}\left(\dfrac{4w + w'}{2w + w'}\right)$ බව

(iii) B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සිරස සමග සාධන කෝණය $\tan^{-1}\left(\dfrac{w + w'}{2w + w'}\tan\theta\right)$ බවද පෙන්වන්න.

---

(12) අරය a හා බර w බැගින් වන ඒකාකාර ගෝල දෙකක් දිග $2a$ හා a වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් එකම O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. ගෝල එකිනෙක ස්පර්ශව සමතුලිතව ඇතිවිට ගෝලමත බල දක්වෙන රූපයක් අඳින්න.
O හරහා යන සිරස් රේඛාව ගෝල දෙකේ කේන්ද්‍ර යාකරන රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවල ආතති පිළිවෙලින් $3\sqrt{\dfrac{2}{11}}\,w$ හා $2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\,w$ බව පෙන්වන්න. ගෝල අතර අන්‍යෝන්‍ය ප්‍රතික්‍රියාව $\sqrt{\dfrac{2}{11}}\,w$ බවද පෙන්වන්න.

(13) බර W හා $2W$ වූ AB, AC සමාන දිගැති ඒකාකාර දඬු දෙකක් A හි දී සුමටව සන්ධිකර ඇති අතර B හා C එකම තිරස් මට්ටමේ වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකට අසව්කර ඇත. රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ පවතින අතර A සිට BC ට ලම්බ දුර h වේ. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමග α කෝණයක් සාදයි.

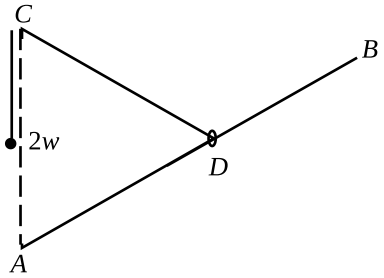
(i) A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

(ii) B හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක $\frac{3W}{4}\cot\alpha$ හා $\frac{5W}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) A හා B ප්‍රතික්‍රියාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට BC සිට ගැඹුර සොයන්න.

---

(14) සුමට ඒකාකාර AB දණ්ඩක දිග $3a$ හා බර W වේ. මෙය A හිදී සුමටව අසව්කර ඇත. සැහැල්ලු සුමට D මුදුවකට දණ්ඩ මත සර්පණය විය හැකිය. D මුදුවට ඈඳා ඇති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් C නාදැත්ත උඩින් දමා $2w$ බර අංශුවකට සවිකර ඇත. $2w$ සිරස් ව එල්ලෙමින් පද්ධතිය සමතුලිතව තිබේ. $AC = 4a$ වේ.



(i) CD තන්තුව AB දණ්ඩට ලම්භ බව පෙන්වන්න.

(ii) සමතුලිත විට දණ්ඩ සිරසට θ ආනත නම්, $3W\tan\theta = 16w$ බව පෙන්වන්න.

(iii) A අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $\frac{w}{W}$ හි අවම අගය ද ලබාගන්න.

---

(15) එක එකක් W බර ද, අර්ධ විෂ්කම්භය r ද වූ A, B ඒකාකාර සුමට ගෝල දෙකක් අක්ෂය සිරස් ව පිහිටන ඡේද ශීර්ෂය පහළට සිටින සේද දෘඪ ලෙස සවි කොට ඇති අර්ධ විෂ්කම්භය R වූ අර්ධ ගෝලාකාර සුමට පාත්‍රයක් තුළ නිශ්චලව තිබේ. බර $2W/3$ ද අර්ධ විශ්කම්භය r ද වූ තෙවැනි ඒකාකාර සුමට ගෝලයක් A හා B මත ගැටෙන සේ සමමිතිකව තබනු ලැබේ. $R < 8r$ වෙතොත් හැර A හා B වෙන් වන බව පෙන්වන්න.

---

(16) අර්ධ විෂ්කම්භය R වන සිලින්ඩරයක් තුළ එකිනෙකෙහි අර්ධ විෂ්කම්භය r ද, බර W ද වූ A, B හා C සුමට සිලින්ඩර තුනක් A, B සිලින්ඩර මත C සිලින්ඩරය පිහිටන සේ සමමිතික ලෙස තබා ඇත. අක්ෂ තිරස් ව පිහිටන සේ සිලින්ඩර සියල්ල තබා ඇත්නම්, පද්ධතිය සමතුලිතව පැවතීම සඳහා,

$r \geq \frac{R}{2\sqrt{7}+1}$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

Manoj Solangaarachchi
(B. Sc.)